

# 用于多载波信号峰均功率比抑制的准互补序列集构造方法研究

李玉博<sup>1,2</sup>, 王美悦<sup>1,2</sup>, 刘涛<sup>1,2</sup>, 陈晓玉<sup>1,2</sup>

(1. 燕山大学信息科学与工程学院, 河北 秦皇岛 066004; 2. 河北省信息传输与信号处理重点实验室, 河北 秦皇岛 066004)

**摘要:** 为解决相互正交互补码集中序列数目受限及多载波码分多址 (MC-CDMA) 系统信号峰均功率比 (PAPR) 过高的问题, 提出一类具有低列向量 PAPR 且参数渐进达到最优的非周期二元准互补序列集 (QCSS) 的构造。通过设计一类新的映射函数集, 得到的参数渐进最优的非周期二元 QCSS 与已有二元 QCSS 相比具有更多的序列数目。并将正交 Golay 序列集作为初始矩阵, 构造得到的非周期 QCSS 列向量为 Golay 序列, 进而保证了其列向量 PAPR 不超过 2。实验仿真结果表明, 所构造的互补序列集可以有效地将时域 MC-CDMA 信号 PAPR 降低到 3 dB, 同时系统具有良好的误码率性能。

**关键词:** 准互补序列集; 渐进最优; 峰均功率比; 多载波码分多址

**中图分类号:** TN911.2

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.11959/j.issn.1000-436x.2023168

## Research on the construction method of quasi-complementary sequence sets for peak-to-average power ratio reduction of multicarrier signal

LI Yubo<sup>1,2</sup>, WANG Meiyue<sup>1,2</sup>, LIU Tao<sup>1,2</sup>, CHEN Xiaoyu<sup>1,2</sup>

1. School of Information Science & Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China

2. Hebei Province Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing, Qinhuangdao 066004, China

**Abstract:** To solve the problem of limited number of sequences in the mutually orthogonal complementary code set and high peak-to-average power ratio (PAPR) in MC-CDMA system, a construction of asymptotically optimal a periodic binary QCSS with low column vector PAPR was proposed. The obtained QCSS with asymptotically optimal parameters had more sequences than the existing QCSS due to the designed mapping set. The QCSS based on the orthogonal Golay sequence set had column vector PAPR of at most 2. Experimental simulation results show that the constructed sequence sets can effectively reduce the time-domain MC-CDMA signal PAPR to 3 dB and have good bit error rate performance.

**Keywords:** quasi-complementary sequence set, asymptotically optimal, peak-to-average power ratio, MC-CDMA

## 0 引言

相互正交的互补码集 (MOCCS, mutually orthogonal complementary code set) 由于具有良好的

相关特性被广泛用于信道估计<sup>[1]</sup>和多载波码分多址 (MC-CDMA, multicarrier code-division multiple-access) 系统中的干扰消除<sup>[2-3]</sup>等。然而由理论界限可知, MOCCS 的集合大小不大于每条互补序列中

收稿日期: 2023-06-12; 修回日期: 2023-08-29

通信作者: 王美悦, wangmeiyue@stumail.yzu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.62241110); 河北省高等学校科学技术研究基金资助项目 (No.ZD2021105, No.ZD2022026); 河北省重点实验室基金资助项目 (No.202250701010046)

**Foundation Items:** The National Natural Science Foundation of China (No.62241110), Science and Technology Project of Hebei Education Department (No.ZD2021105, No.ZD2022026), Hebei Province Key Laboratory Project (No.202250701010046)

的子序列数目, 当集合大小等于子序列数目时, MOCCS 为完全互补码 (CCC, complete complementary code), 这使互补码在 MC-CDMA 系统中海量用户接入<sup>[4]</sup>的应用受到极大限制。为此, Liu 等<sup>[5]</sup>提出了准互补序列集 (QCSS, quasi-complementary sequence set) 的概念, 包括低相关区互补序列集 (LCZ-CSS, low correlation zone complementary sequence set) 和低相关互补序列集 (LC-CSS, low correlation complementary sequence set)。LCZ-CSS 的相关函数旁瓣幅值在零偏移附近的相关区内很低, 当相关区长度等于子序列长度时, LCZ-CSS 被称为 LC-CSS。关于序列的相关下界由 Welch<sup>[6]</sup>自 1974 年给出后, Liu 等<sup>[7-9]</sup>在一系列工作中推导出了非周期 QCSS 在特殊条件下更加紧密的相关下界, 并称达到此下界的 QCSS 最优。

到目前为止, 针对各种参数的最优 QCSS 的构造还不完善。文献[5]利用 Singer 差集构造了两类最优和渐进最优的周期 QCSSs。通过将文献[5]中的 Singer 差集替换为几乎差集, 文献[10]提出了一类渐进最优的周期 QCSS。文献[11-12]基于有限域上的加法与乘法特征给出了最优和渐进最优的周期 QCSSs 的构造方法。然而, 前述文献只涉及周期相关特性, 文献[13]指出非周期相关特性的 QCSS 在实际应用中的重要作用, 因此, 该文首先提出了渐进最优非周期 QCSS, 并给出了非周期 LC-CSS 的 3 种构造, 然而, 其构造的序列集中互补序列的数目不多且子序列长度受限于素数, 尤其是对于二元 QCSS, 其互补序列数目甚少, 不利于其在多用户接入场景下的应用。文献[14]提出了一种具有渐进最优参数非周期二元 LCZ-CSS 的构造, 具有渐进最优参数非周期二元 LC-CSS 可从所提的构造中导出, 该文构造的序列集的互补序列数目较多且为二进制序列, 因此在实际系统中更容易实现。众所周知, 多载波通信系统存在信号峰均功率比 (PAPR, peak-to-average power ratio) 过高的问题, 高 PAPR 值可能使发射机前端电路饱和, 导致发射信号非线性失真, 进而降低系统性能。结合互补码集与 MC-CDMA 系统的特点, 文献[15]通过分析时域扩频 MC-CDMA 信号结构, 得出时域扩频 MC-CDMA 系统信号 PAPR 由用户扩频的 CCC 所组成二维矩阵的列向量所决定的结论。为解决该问题, 文献[15]基于广义布尔函数构造了具有低列向量 PAPR 的 CCC 集。近年来, 文献[16]进一步基于多变量函数

构造了具有低列向量 PAPR 的 CCC 集。相比传统 CCC, QCSS 具有序列数目众多的优势, 因此在大规模多址接入场景中有巨大的应用潜力。然而目前 QCSS 的构造方法并不多, 而且已有的构造方法都没有考虑到时域扩频 MC-CDMA 信号 PAPR 抑制<sup>[17-19]</sup>的问题, 因此在最差情况下系统信号 PAPR 达到了最大值, 即与子序列数目相等, 这在子载波数比较多的系统当中是难以接受的。构造具有低列向量 PAPR 的 QCSS 一方面可以解决海量用户接入的问题, 另一方面可以解决时域扩频多载波系统信号 PAPR 过高的问题, 这是本文的主要研究动机。

在实际应用中, 二元序列直接对应二进制相移键控 (BPSK, binary phase shift keying) 调制, 具有方便实现的优点, 因此相比于其他单位圆上的多相复数根序列, 二元序列是更加理想的扩频序列。本文基于正交 Golay 序列 (OGS, orthogonal golay sequence) 集, 提出了一类渐进最优非周期二元 QCSS 的构造。相较于文献[14], 本文提出的构造不仅具有更多数目的准互补序列, 且有至多为 2 的列向量 PAPR。最后, 将构造得到的 LC-CSS 在准异步 QCSS-MC-CDMA 系统中进行误码率 (BER, bit error rate) 仿真, 可以看出, 其与文献[14]具有相似的 BER 性能, 但由于其列向量 PAPR 远小于后者, 可解决时域多载波信号 PAPR 过高的问题。

### 1 基本概念和定义

**定义 1** 令  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$  和  $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$  是两条长度为  $N$  的二元序列, 其非周期互相关函数定义为

$$\tilde{R}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\tau) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{N-1-\tau} a_t b_{t+\tau}, & 0 \leq \tau \leq N-1 \\ \sum_{t=0}^{N-1+\tau} a_{t-\tau} b_t, & -N+1 \leq \tau < 0 \end{cases} \quad (1)$$

当  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  时,  $\tilde{R}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\tau)$  为非周期自相关函数, 记为  $\tilde{R}_{\mathbf{a}}(\tau)$ 。

**定义 2** 定义  $\mathbf{C} = \{\mathbf{C}^0, \mathbf{C}^1, \dots, \mathbf{C}^{K-1}\}$  包含  $K$  条互补序列, 每条互补序列  $\mathbf{C}^k$  由  $M$  条长度为  $N$  的子序列组成, 即

$$\mathbf{C}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^k \\ \mathbf{c}_1^k \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{M-1}^k \end{bmatrix} = [\mathbf{d}_0^k, \mathbf{d}_1^k, \dots, \mathbf{d}_{N-1}^k] \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{c}_m^k$  为  $\mathbf{C}^k$  的第  $m$  个行向量,  $\mathbf{d}_n^k$  为  $\mathbf{C}^k$  的第  $n$  个列向量,  $0 \leq m \leq M-1, 0 \leq n \leq N-1, 0 \leq k \leq K-1$ 。

设  $\mathbf{C}^{k_1}, \mathbf{C}^{k_2} \in \mathbf{C}$  ( $0 \leq k_1, k_2 \leq K-1$ ) 为序列集  $\mathbf{C}$  中任意两条互补序列, 其非周期相关函数定义为

$$\tilde{R}_{\mathbf{c}^{k_1}, \mathbf{c}^{k_2}}(\tau) = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{R}_{\mathbf{c}_m^{k_1}, \mathbf{c}_m^{k_2}}(\tau) \quad (3)$$

最大非周期自相关函数幅值  $\delta_a$  和最大非周期互相关函数幅值  $\delta_c$  分别为

$$\delta_a = \max \left\{ \left| \tilde{R}_{\mathbf{c}^k, \mathbf{c}^k}(\tau) \right| : 0 \leq k \leq K-1, 1 \leq \tau \leq N-1 \right\}$$

$$\delta_c = \max \left\{ \left| \tilde{R}_{\mathbf{c}^{k_1}, \mathbf{c}^{k_2}}(\tau) \right| : 0 \leq k_1 \neq k_2 \leq K-1, 0 \leq \tau \leq N-1 \right\}$$

则  $\delta_{\max} = \max \{ \delta_a, \delta_c \}$  为最大非周期相关函数幅值。

**定义 3** 对于集合  $\mathbf{C} = \{ \mathbf{C}^0, \mathbf{C}^1, \dots, \mathbf{C}^{K-1} \}$ , 如果其满足式(4)条件, 则称序列集  $\mathbf{C}$  为 LCZ-CSS。

$$\left| \tilde{R}_{\mathbf{c}^{k_1}, \mathbf{c}^{k_2}}(\tau) \right| \leq \delta_{\max} \quad (4)$$

其中,  $0 \leq k_1 \neq k_2 \leq K-1$  且  $0 \leq \tau \leq Z-1$ , 或  $0 \leq k_1 = k_2 \leq K-1$  且  $0 < \tau \leq Z-1$ ,  $0 < \delta_{\max} \ll MN$ 。序列集  $\mathbf{C}$  参数表示为  $(K, M, N, Z, \delta_{\max})$ -LCZ-CSS, 其中,  $K$  为互补序列数目,  $M$  为每条互补序列的子序列数目,  $N$  为子序列长度,  $\delta_{\max}$  是长度为  $Z$  的低相关区内的最大非周期相关函数幅值。特别地, 如果  $Z = N$ , 则称序列集  $\mathbf{C}$  为 LC-CSS。

为评估 QCSS 相关性能的优劣, Liu 等<sup>[20]</sup>给出了 QCSS 参数需满足的理论界限, 如引理 1 所示。

**引理 1**<sup>[20]</sup> 对于  $(K, M, N, Z, \delta_{\max})$ -LCZ-CSS,  $\delta_{\max}$  满足

$$\delta_{\max} \geq MN \sqrt{\frac{\left( \frac{K}{M-1} \right) Z - N + 1}{(KZ-1)(N+Z-1)}} \quad (5)$$

Liu 等<sup>[8]</sup>提出了对于非周期 LC-CSS 更加紧密的相关下界, 如引理 2 所示。

**引理 2**<sup>[8]</sup> 当  $K \geq 3M, M \geq 2$  及  $N \geq 2$  时, 对于非周期  $(K, M, N, \delta_{\max})$ -LC-CSS,  $\delta_{\max}$  满足

$$\delta_{\max} \geq \sqrt{MN \left( 1 - 2\sqrt{\frac{M}{3K}} \right)} \quad (6)$$

为便于分析相关性能, 定义最优因子  $\rho$  分别为

$$\rho_{\text{LCZ}} = \frac{\delta_{\max}}{MN \sqrt{\frac{\left( \frac{K}{M-1} \right) Z - N + 1}{(KZ-1)(N+Z-1)}}} \quad (7)$$

$$\rho_{\text{LC}} = \frac{\delta_{\max}}{\sqrt{MN \left( 1 - 2\sqrt{\frac{M}{3K}} \right)}} \quad (8)$$

显然,  $\rho \geq 1$ 。当 QCSS 的最优因子  $\rho = 1$  时, 称其为最优的; 当  $1 < \rho \leq 2$  时, 称其为渐进最优的。

**定义 4** 记  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$  为一条长度为  $N$  的二元序列, 将序列  $\mathbf{a}$  扩展到具有  $N$  个子载波的多载波通信系统中, 假设基频为 0, 相邻子载波间的频率间隔为 1, 则时域多载波信号可以被写为

$$s_a(t) = \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^{a_i} e^{2\pi\sqrt{-1}it}, \quad 0 \leq t < 1 \quad (9)$$

记  $P_a(t) = |s_a(t)|^2$  和  $A_a = N$  分别为瞬时功率和平均功率, 那么在多载波调制下序列  $\mathbf{a}$  的瞬时平均功率比 (IAPR, instantaneous-to-average power ratio) 和 PAPR 分别定义为

$$\text{IAPR}(\mathbf{a}) = \frac{|s_a(t)|^2}{N} \quad (10)$$

$$\text{PAPR}(\mathbf{a}) = \max_{0 \leq t < 1} \frac{P_a(t)}{A_a} = \frac{1}{N} \max_{0 \leq t < 1} |s_a(t)|^2 \quad (11)$$

Liu 等<sup>[15]</sup>指出, MC-CDMA 系统中的 PAPR 控制问题是由互补矩阵的列向量 PAPR 决定的, 因此, 多载波系统中的峰均功率控制问题是降低所有互补码的列向量的最大 PAPR。例如, 给出一条含有 8 个长度为 7 的子序列的二元互补序列, 并将其写成矩阵的形式

$$\mathbf{S} = [\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_6] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

图 1 给出了该互补序列中 4 条列向量的 IAPR 曲线。在多载波通信系统中, 由式(9)可知, 由于多个子载波在某个时刻以同一个方向进行累加时, 会产生较大峰值, 在最差情况下, 所有子载波同时达到最大值, 此时 PAPR 为子载波数目, 如图 1 中  $d_0$  的 IAPR 最大值为子序列数目 8。当信号峰值进入功率放大器的非线性区域时, 会使信号产生畸变, 从而产生载波间干扰和带外功率辐射, 降低系统性能。因此, 对于多载波信号 PAPR 抑制的 QCSS 构造方法的研究是很有必要的。

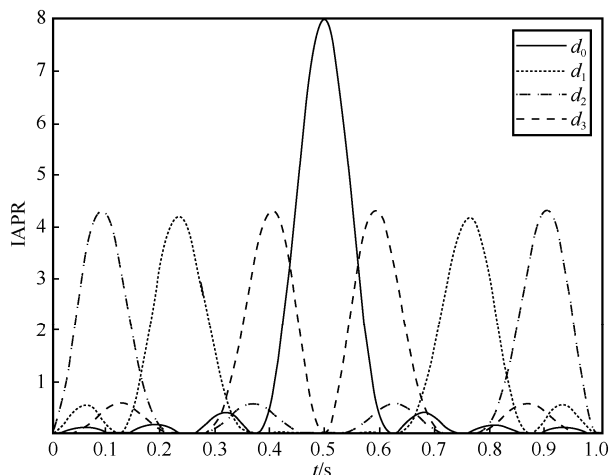


图 1 4 条列向量的 IAPR 曲线

因此, 本文工作的目标是构造低列向量 PAPR 的 QCSS, 这将有 2 个方面的好处: 一方面, 系统的 PAPR 得到抑制; 另一方面, 互补序列的数目得到扩展。这 2 个方面的优势使所构造的 QCSS 在海量用户接入的 MC-CDMA 系统具有较大的应用潜力。

## 2 QCSS 的构造

**步骤 1** 有限域  $\mathbb{F}_{2^n}$ , 其本原元为  $\alpha$  且  $n \geq 3$ 。

取一正整数  $Z$  使  $Z \leq 2^n - 1$ 。

**步骤 2** 记  $\mathbf{S} = [s_j^i]_{2^n \times 2^n}$  是  $2^n \times 2^n$  的二元 OGS 集, 其每条序列的 PAPR 都以 2 为上界,  $s_j^i \in \{+1, -1\}$  表示第  $i$  行第  $j$  列的元素, 即  $\mathbf{S}$  的第  $i$  行可以表示为  $\mathbf{s}^i = (s_0^i, s_1^i, \dots, s_{2^n-1}^i)$ ,  $0 \leq i \leq 2^n - 1$ 。类似地, 记  $\mathbf{H} = [h_j^i]_{2^n \times 2^n}$  是  $2^n \times 2^n$  的二元 Hadamard 矩阵,  $\mathbf{H}$  的第  $i$  行可以表示为  $\mathbf{h}^i = (h_0^i, h_1^i, \dots, h_{2^n-1}^i)$ ,  $0 \leq i \leq 2^n - 1$ 。

**步骤 3** 定义互补序列集  $\mathbf{C} = \{\mathbf{C}^{(u,k,v)} \mid$

$$0 \leq u \leq U-1, 0 \leq k \leq 2^n - 1, 0 \leq v \leq \left\lfloor \frac{2^n - 1}{Z} \right\rfloor - 1 \},$$

其中  $\lfloor t \rfloor$  表示  $t$  向下取整, 具体为

$$\mathbf{C}^{(u,k,v)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0^{(u,k,v)} \\ \mathbf{C}_1^{(u,k,v)} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{2^n-1}^{(u,k,v)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{0,0}^{(u,k,v)} & c_{0,1}^{(u,k,v)} & \cdots & c_{0,2^n-2}^{(u,k,v)} \\ c_{1,0}^{(u,k,v)} & c_{1,1}^{(u,k,v)} & \cdots & c_{1,2^n-2}^{(u,k,v)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2^n-1,0}^{(u,k,v)} & c_{2^n-1,1}^{(u,k,v)} & \cdots & c_{2^n-1,2^n-2}^{(u,k,v)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

互补序列  $\mathbf{C}^{(u,k,v)}$  中的每个元素定义为

$$c_{m,t}^{(u,k,v)} = s_m^{\pi_u(t+vZ)} h_{t+1}^k \quad (14)$$

其中,  $0 \leq m \leq 2^n - 1$ ,  $0 \leq t \leq 2^n - 2$ ;  $\pi_u$  是长度为  $2^n - 1$  的从  $\mathbb{F}_{2^n}$  到  $\mathbb{Z}_{2^n}$  的一对一映射序列, 其中  $0 \leq u \leq U - 1$ 。设计映射集  $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{U-1}\}$ , 使其满足如下性质。

**性质 1** 对于任意  $0 \leq u \leq U - 1$ ,  $0 \leq t \leq 2^n - 2$  和  $\tau \neq 0$ , 都有  $\pi_u(t + \tau) \neq \pi_u(t)$ 。

**性质 2** 对于任意  $0 \leq u_1 \neq u_2 \leq U - 1$ ,  $0 \leq t \leq 2^n - 2$ , 都有  $\pi_{u_1}(t) \neq \pi_{u_2}(t)$ 。

**性质 3** 对于任意  $0 \leq u_1 \neq u_2 \leq U - 1$  和  $\tau \neq 0$ , 只有唯一解  $t_0$ , 使  $\pi_{u_1}(t_0 + \tau) = \pi_{u_2}(t_0)$ , 其中  $0 \leq t_0 \leq 2^n - 2$ 。

**定理 1** 经由上述方法构造得到的互补序列集  $\mathbf{C}$  具有如下性质。

1) 序列集  $\mathbf{C}$  是一个非周期二元 QCSS, 其参数为  $\left(2^n \left\lfloor \frac{2^n - 1}{Z} \right\rfloor U, 2^n, 2^n - 1, Z, 2^n\right)$ -LCZ-CSS。

2) 每个互补矩阵的列向量 PAPR 上界都为 2。

**证明** 详见附录 1。

由于 LC-CSS 是 LCZ-CSS 的一个特例, 因此可从定理 1 直接得出以下推论。

**推论 1** 在定理 1 的序列集  $\mathbf{C}$  的构造中设置  $Z = 2^n - 1$ , 那么由此构造的序列集  $\mathbf{C}$  是非周期二元  $(2^n U, 2^n, 2^n - 1, 2^n)$ -LC-CSS。

在上述构造中, 显然, 映射集  $\boldsymbol{\pi}$  的构造是一个关键因素。文献[14]利用有限域上的本原元构造了一个包含有  $2^n$  条映射序列的映射集

$$\pi_u(t) = \begin{cases} \phi(\alpha^t), & u = 0 \\ \phi(\alpha^t + \alpha^u), & 1 \leq u \leq 2^n - 1 \end{cases} \quad (15)$$

其中,  $0 \leq t \leq 2^n - 2$ ,  $\alpha$  是  $\text{GF}(2^n)$  的本原元,  $\phi$  是从  $\mathbb{F}_{2^n}$  到  $\mathbb{Z}_{2^n}$  的一对一映射函数, 取  $\mathbb{F}_{2^n}$  中元素的十进制形式。本文给出一种新的映射集  $\pi$  的构造方法, 具体如引理 3 所示。

**引理 3** 记有限域  $\text{GF}(p^n)$ ,  $p$  为素数,  $n$  为正整数。在  $\text{GF}(p)$  上选择一个  $n$  次本原多项式  $f(x)$ , 以  $f(x)$  为  $m$  序列的生成多项式, 各寄存器的非零状态序列记为  $G = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p^n-2}\}$ , 对  $G$  的各项依次加上一个固定状态, 并用十进制表示, 则可得到  $p^n$  条长度为  $p^n - 1$  的从  $\mathbb{F}_{p^n}$  到  $\mathbb{Z}_{p^n}$  的一对一映射序列  $\pi_u$ , 具体定义式为

$$\pi_u(t) = \begin{cases} \beta_t, & u = 0 \\ \beta_t + \beta_{u-1}, & 1 \leq u \leq p^n - 1 \end{cases} \quad (16)$$

其中,  $0 \leq t \leq p^n - 2$ 。该映射序列具有以下性质。

**性质 4** 对于任意  $0 \leq u \leq p^n - 1$ ,  $0 \leq t \leq p^n - 2$  和  $\tau \neq 0$ , 都有  $\pi_u(t + \tau) \neq \pi_u(t)$ 。

**性质 5** 对于任意  $0 \leq u_1 \neq u_2 \leq p^n - 1$ ,  $0 \leq t \leq p^n - 2$ , 都有  $\pi_{u_1}(t) \neq \pi_{u_2}(t)$ 。

**性质 6** 对于任意  $0 \leq u_1 \neq u_2 \leq p^n - 1$  和  $\tau \neq 0$ , 只有唯一的解  $t_0$ , 使  $\pi_{u_1}(t_0 + \tau) = \pi_{u_2}(t_0)$ , 其中  $0 \leq t_0 \leq p^n - 2$ 。

**证明** 详见附录 2。

引理 3 构造了不同于文献[14]的映射集。事实上, 映射集  $\pi$  所满足的性质与非重复一次碰撞跳频序列的性质相似, 因此可以通过寻求这样的跳频序列来进一步构造许多满足定理 1 的 QCSS。

**推论 2** 利用本文提出的引理 3 的映射集, 由定理 1 构造的  $\left(2^{2^n} \left\lfloor \frac{2^n - 1}{Z} \right\rfloor, 2^n, 2^n - 1, Z, 2^n\right)$ -LCZ-CSS

可知, 引理 3 构造的准互补序列集是渐进最优的。

**证明** 详见附录 3。

**推论 3** 利用引理 3 的映射集, 根据定理 1 构造的  $(2^{2^n}, 2^n, 2^n - 1, 2^n)$ -LC-CSS 可知, 引理 3 构造的准互补序列集是渐进最优的。

**证明** 详见附录 4。

表 1 列出了本文和文献 [14] 在  $Z = 4$  和  $3 \leq n \leq 10$  时的二元 LCZ-CSS 的参数比较。从表 1 可以看出, 本文相较于文献[14]扩展了互补序列的数目。

表 1 非周期二元 LCZ-CSS 的参数比较

n	K		M	N	Z	$\rho$	
	本文	文献[14]				本文	文献[14]
3	64	56	8	7	4	1.538 0	1.590 1
4	768	720	16	15	4	1.188 3	1.192 4
5	7 168	6 944	32	31	4	1.084 8	1.085 5
6	61 440	60 480	64	63	4	1.040 6	1.040 7
7	507 904	503 936	128	127	4	1.019 9	1.019 9
8	4 128 768	4 112 640	256	255	4	1.009 9	1.009 9
9	33 292 288	33 227 264	512	511	4	1.004 9	1.004 9
10	267 386 880	267 125 760	1 024	1 023	4	1.002 4	1.002 4

本节给出了低列向量 PAPR 的渐进最优非周期二元 QCSS 的构造方法。首先给出了列向量 PAPR 上界为 2 的 QCSS 的一般构造框架, 其次将引理 3 构造的映射集代入构造框架中, 进而可以构造渐进最优的 QCSS, 经此构造得到的 QCSS 不仅互补序列数目多且其列向量 PAPR 上界为 2。文献[21]利用布尔函数构造了过载率最大为 4 的二元 OGS 集, 通过更换不同的 OGS 集, 进而可以构造 QCSS。例如当  $n = 5$  时, 可以构造 4 个满足定理 1 的 QCSS, 大大增加了系统中可容纳的用户数目。文献[21-22]已经构造出大量的 OGS 集, 本文提出的构造方法的优势是基于多个二元 OGS 集可得到多个渐进最优的非周期二元 QCSS, 其内的每个互补序列都有低列向量 PAPR, 且其上界为 2。

### 3 QCSS-MC-CDMA 系统中的性能分析

考虑具有子载波为  $M$ 、码片持续时间为  $N$  的上行链路 QCSS-MC-CDMA 系统, 假设有  $K$  个用户, 其中第 0 个用户为期望用户, 即它是在多个用户存在的情况下检测信号的预期用户。系统的收发端结构如图 2 所示, 其中  $b_k(n)$  代表第  $k$  个用户的 BPSK 的信号, 假设该系统为准异步系统, 考虑均值为 0 的高斯白噪声信道。

首先利用为每个用户分配的互补序列对调制信号进行扩频, 将得到的扩频矩阵按列进行快速傅里叶逆变换 (IFFT, inverse fast Fourier transform) 以获得时域样本, 然后加入循环前缀以抑制符号间串扰和子载波间干扰, 接着经过并串变换得到用户要发送的信号。接收端的接收信号可表示为

$$r[n] = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{F}_M^{-1} b_k[n] \otimes \mathbf{C}^k + \omega[n] \quad (17)$$

其中,  $\otimes$  表示 Kronecker 积,  $\mathbf{F}_M^{-1}$  表示  $M \times M$  维 IFFT 矩阵,  $\omega[n]$  表示加性白高斯噪声。接收端执行与发

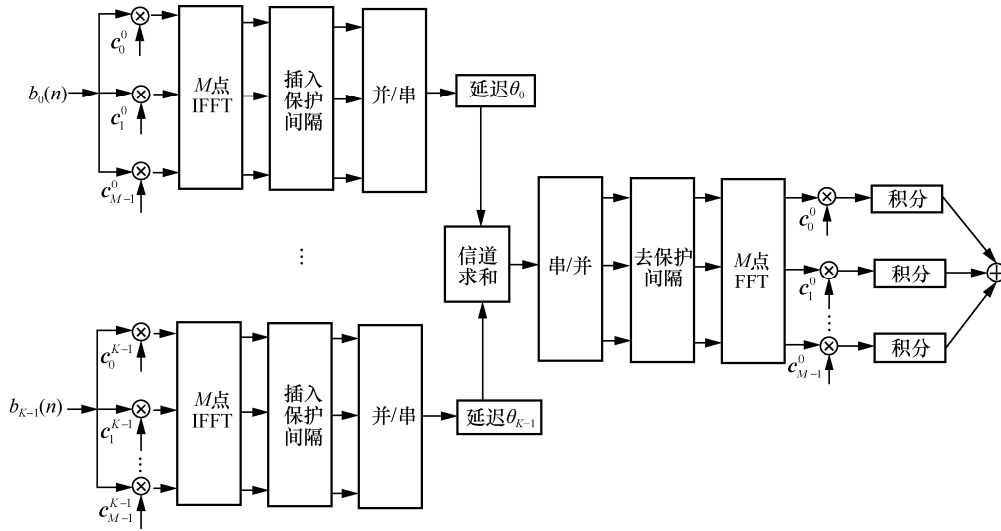


图 2 准异步 QCSS-MC-CDMA 系统的收发端结构

射端相反的操作，在将  $C^0$  解扩 MC-CDMA 符号之后，第 0 个用户信号可以表示为

$$z = \sum_{k=0}^{K-1} C^0 F_M F_M^{-1} b_k[n] \otimes C^k + N_0 \quad (18)$$

其中， $N_0$  表示噪声向量。类似地，其他用户的接收信号可以通过在接收端处改变解扩码来获得。

取  $n=5$ ， $Z=31$ ，基于引理 3 和文献[21]的 OGS 集可构造 4 个 QCSS，每个序列集的参数为 (1024,32,31,32)-LC-CSS，从所构造的 QCSS 中选取  $K=8$  个用户进行仿真实验，蒙特卡罗仿真次数为  $10^4$ 。图 3 为本文和文献[14]所构造互补序列进行多载波调制后的列向量 IAPR 的比较，图 4 给出了两者所有列向量 PAPR 分布的比较。从图 3 和图 4 可以明显看出，本文互补矩阵的列向量 PAPR 最大为 2，而文献[14]中互补矩阵的列向量 PAPR 最大为子序列的个数 32，即本文所构造的序列应用到 MC-CDMA 系统中信号的 IAPR 得到了有效的抑制。图 5 为本文和文献 [14] 构造的 QCSS 在准异步 QCSS-MC-CDMA 系统中的 BER 性能的比较。从图 5 可以看出，两者具有相似的 BER 性能，但是本文所构造的 QCSS 具有更低的列向量 PAPR 且有更多的互补序列数目。

以上仿真结果很好地验证了前述理论分析的正确性，相较于文献[14]，本文构造的 QCSS 不仅抑制了系统 PAPR，而且大大扩展了互补序列数目，然而，值得注意的是，本文利用 OGS 集作为初始序列集构造 QCSS 属于间接构造法，最后得到的序

列集的参数依赖于初始序列集的参数，这是本文方法的一个不足之处，研究序列的直接构造法是笔者下一步的研究方向。

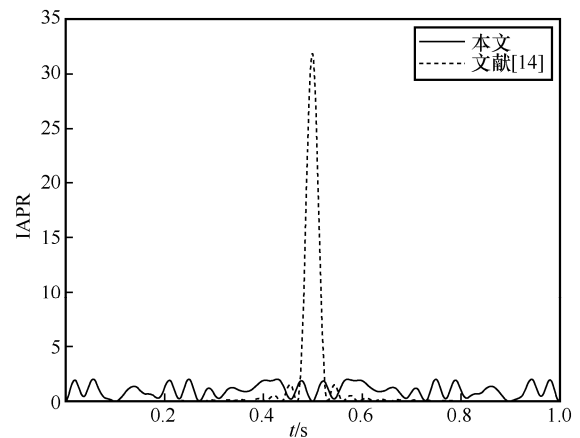


图 3 本文和文献[14]所构造互补序列进行多载波调制后的列向量 IAPR 的比较

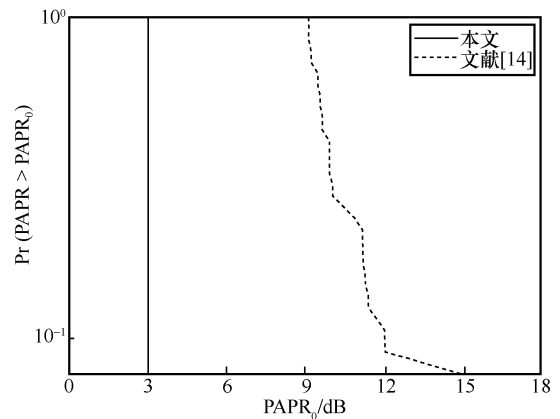


图 4 本文和文献[14]所构造互补序列进行多载波调制后的所有列向量 PAPR 分布的比较

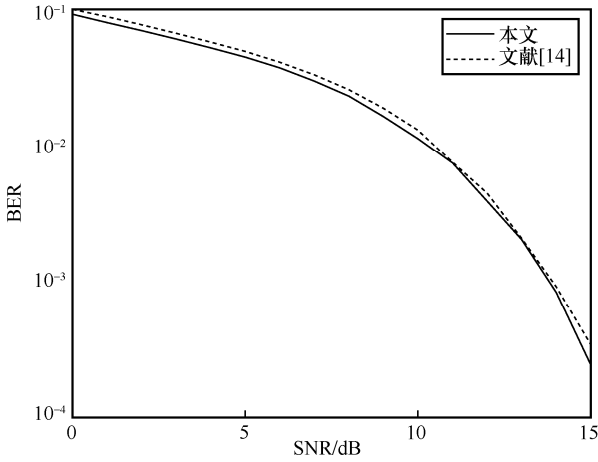


图 5 本文和文献[14]构造的 QCSS 在准异步 QCSS-MC-CDMA 系统中的 BER 性能的比较

### 4 结束语

本文基于 OGS 集提出了一类渐进最优非周期二元 QCSS 的构造,并在 QCSS-MC-CDMA 系统中进行仿真。相较文献[14],本文构造的 QCSS 有相似的 BER 性能,但有至多为 2 的列向量 PAPR,且互补序列数目大大增加,这在支持海量用户场景下的 MC-CDMA 系统中可靠传输具有较大应用潜力。

### 附录 1 定理 1 证明

首先证明定理 1 的第一部分。从式(14)中可以明显看出,所得序列集  $\mathbf{C}$  为二元的。接下来证明其最大非平凡相关值上界为  $2^n$ 。假设  $\mathbf{C}^{(u_1, k_1, v_1)}, \mathbf{C}^{(u_2, k_2, v_2)} \in \mathbf{C}$ , 其中  $0 \leq u_1, u_2 \leq U-1, 0 \leq k_1, k_2 \leq 2^n-1, 0 \leq v_1, v_2 \leq \left\lfloor \frac{2^n-1}{Z} \right\rfloor-1$ , 这两条互补序列间的非周期相关函数为

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{2^n-1} \tilde{R} \mathbf{C}_m^{(u_1, k_1, v_1)}, \mathbf{C}_m^{(u_2, k_2, v_2)}(\tau) = \\ & \sum_{m=0}^{2^n-1} \sum_{t=0}^{2^n-2-\tau} c_{m,t}^{(u_1, k_1, v_1)} c_{m,t+\tau}^{(u_2, k_2, v_2)} = \\ & \sum_{t=0}^{2^n-2-\tau} h_{t+1}^{k_1} h_{t+\tau+1}^{k_2} \sum_{m=0}^{2^n-1} s_m^{\pi_{u_1}(t+v_1 Z)} s_m^{\pi_{u_2}(t+v_2 Z+\tau)} = \\ & \sum_{t=0}^{2^n-2-\tau} h_{t+1}^{k_1} h_{t+\tau+1}^{k_2} \tilde{R}_{s^{\pi_{u_1}(t+v_1 Z)}, s^{\pi_{u_2}(t+v_2 Z+\tau)}}(0) \end{aligned} \quad (19)$$

分以下 3 种情况分析。

1) 假设  $u_1 = u_2$ 。若  $v_1 = v_2, \tau = 0$  且  $k_1 \neq k_2$ , 则

$$\begin{aligned} & \tilde{R}_{s^{\pi_{u_1}(t+v_1 Z)}, s^{\pi_{u_2}(t+v_2 Z)}}(0) = 2^n, \quad \sum_{t=0}^{2^n-2} h_{t+1}^{k_1} h_{t+\tau+1}^{k_2} = -1, \quad \text{式 (19) 即} \\ & \sum_{m=0}^{2^n-1} \tilde{R} \mathbf{C}_m^{(u_1, k_1, v_1)}, \mathbf{C}_m^{(u_2, k_2, v_2)}(0) = -2^n; \quad \text{若 } v_1 = v_2, \quad 1 \leq \tau \leq Z-1 \text{ 或} \end{aligned}$$

$v_1 \neq v_2, 0 \leq \tau \leq Z-1$ , 根据性质 1, 此时有  $\pi_{u_1}(t+v_1 Z) \neq \pi_{u_1}(t+v_2 Z+\tau)$ , 由于矩阵  $\mathbf{S}$  的不同行之间正交, 则有  $\tilde{R}_{s^{\pi_{u_1}(t+v_1 Z)}, s^{\pi_{u_2}(t+v_2 Z+\tau)}}(0) = 0$ , 式 (19) 即

$$\sum_{m=0}^{2^n-1} \tilde{R} \mathbf{C}_m^{(u_1, k_1, v_1)}, \mathbf{C}_m^{(u_2, k_2, v_2)}(\tau) = 0.$$

2) 假设  $u_1 \neq u_2$  且  $\tau = 0$ 。若  $v_1 = v_2$ , 根据性质 2, 有

$$\begin{aligned} & \pi_{u_1}(t+v_1 Z) \neq \pi_{u_2}(t+v_2 Z), \quad \sum_{m=0}^{2^n-1} \tilde{R} \mathbf{C}_m^{(u_1, k_1, v_1)}, \mathbf{C}_m^{(u_2, k_2, v_2)}(0) = 0; \quad \text{若} \\ & v_1 \neq v_2, \text{ 由性质 3, 此时有唯一解 } t_0, \quad 0 \leq t_0 \leq 2^n-2, \text{ 使} \\ & \pi_{u_1}(t_0+v_1 Z) = \pi_{u_2}(t_0+v_2 Z), \text{ 则} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{2^n-1} \tilde{R} \mathbf{C}_m^{(u_1, k_1, v_1)}, \mathbf{C}_m^{(u_2, k_2, v_2)}(0) = h_{t_0+1}^{k_1} h_{t_0+\tau+1}^{k_2} 2^n + \\ & \sum_{t=0, t \neq t_0}^{2^n-2} h_{t+1}^{k_1} h_{t+\tau+1}^{k_2} \tilde{R}_{s^{\pi_{u_1}(t+v_1 Z)}, s^{\pi_{u_2}(t+v_2 Z)}}(0) = h_{t_0+1}^{k_1} h_{t_0+\tau+1}^{k_2} 2^n \end{aligned} \quad (20)$$

3) 假设  $u_1 \neq u_2$  且  $1 \leq \tau \leq Z-1$ 。由性质 3, 此时有唯一解  $t_0, 0 \leq t_0 \leq 2^n-2$ , 使  $\pi_{u_1}(t_0+v_1 Z) = \pi_{u_2}(t_0+v_2 Z+\tau)$ , 若  $0 \leq t_0 \leq 2^n-2-\tau$ , 此时有

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{2^n-1} \tilde{R} \mathbf{C}_m^{(u_1, k_1, v_1)}, \mathbf{C}_m^{(u_2, k_2, v_2)}(\tau) = h_{t_0+1}^{k_1} h_{t_0+\tau+1}^{k_2} 2^n + \\ & \sum_{t=0, t \neq t_0}^{2^n-2-\tau} h_{t+1}^{k_1} h_{t+\tau+1}^{k_2} \tilde{R}_{s^{\pi_{u_1}(t+v_1 Z)}, s^{\pi_{u_2}(t+v_2 Z+\tau)}}(0) = h_{t_0+1}^{k_1} h_{t_0+\tau+1}^{k_2} 2^n \end{aligned} \quad (21)$$

否则, 对于  $0 \leq t \leq 2^n-2-\tau$ , 有  $\pi_{u_1}(t_0+v_1 Z) =$

$$\pi_{u_2}(t_0+v_2 Z+\tau), \text{ 则 } \sum_{m=0}^{2^n-1} \tilde{R} \mathbf{C}_m^{(u_1, k_1, v_1)}, \mathbf{C}_m^{(u_2, k_2, v_2)}(\tau) = 0.$$

结合以上 3 种情况可知, 定理 1 所构造的序列集  $\mathbf{C}$  是一个非周期二元 QCSS, 其参数为  $\left(2^n \left\lfloor \frac{2^n-1}{Z} \right\rfloor U, 2^n, 2^n-1, Z, 2^n\right)$ -LCZ-CSS。

接下来证明定理 1 的第二部分。根据式(14), 任意一条序列集  $\mathbf{C}$  的列向量可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_t^{(u, k, v)} &= (c_{0,t}^{(u, k, v)}, c_{1,t}^{(u, k, v)}, \dots, c_{2^n-1,t}^{(u, k, v)}) = \\ & (s_0^{\pi_u(t+vZ)}, s_1^{\pi_u(t+vZ)}, \dots, s_{2^n-1}^{\pi_u(t+vZ)}) h_{t+1}^k = \\ & (s_0^l, s_1^l, \dots, s_{2^n-1}^l) h_{t+1}^k \end{aligned} \quad (22)$$

其中,  $0 \leq t \leq 2^n-2$ 。记  $l = \pi_u(t+vZ)$ , 可以看出序列集  $\mathbf{C}$  的每一列是集合  $\mathbf{S}$  的任一行点乘上一个取值为  $\pm 1$  的元素, 由于  $\mathbf{S}$  的每一行是一条 Golay 序列, 因此经由式(14)所得到的互补序列集  $\mathbf{C}$  的每一列也都是 Golay 序列, 由文献[21]可知, Golay 序列的 PAPR 以 2 为上界。

证毕。

### 附录 2 引理 3 证明

由于各寄存器的非零状态序列互不相同, 因此性质 4 和性质 5 显然成立, 接下来对性质 6 进行证明。当  $1 \leq u_1 \neq u_2 \leq p^n - 1$  且  $\tau \neq 0$  时, 假设  $\pi_{u_1}(t_0 + \tau) = \pi_{u_2}(t_0)$ , 则有  $\beta_{t_0+\tau} + \beta_{u_1-1} = \beta_{t_0} + \beta_{u_2-1}$ , 即  $\beta_{t_0+\tau} - \beta_{t_0} = \beta_{u_2-1} - \beta_{u_1-1}$ , 记  $\beta_{u_2-1} - \beta_{u_1-1} = \beta_{t'}$ ,  $0 \leq t' \leq p^n - 2$ , 那么  $\beta_{t_0+\tau} - \beta_{t_0} = \beta_{t'}$ 。由性质 4 可知, 对于固定的  $\tau$ , 只存在唯一的  $t_0$ ,  $0 \leq t_0 \leq p^n - 2$ , 使  $\beta_{t_0+\tau} - \beta_{t_0} = \beta_{t'}$  成立; 当  $u_1 = 0$ ,  $1 \leq u_2 \leq p^n - 1$  或  $u_2 = 0$ ,  $1 \leq u_1 \leq p^n - 1$  时, 类似地, 可以证明存在唯一的  $t_0$ ,  $0 \leq t_0 \leq p^n - 2$ , 使  $\pi_{u_1}(t_0 + \tau) = \pi_{u_2}(t_0)$ , 则性质 6 即证。

### 附录 3 推论 2 证明

根据引理 1, 最优因子为

$$\rho_{LCZ} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{2^{2n} \zeta Z}\right) \left(1 + \frac{Z-1}{2^n - 1}\right)}{1 - \frac{1}{\zeta Z} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n \zeta} - \frac{1}{2^{2n} \zeta Z} + \frac{1}{2^{2n} \zeta} + \frac{1}{2^n \zeta Z} + \frac{1}{2^{n-1} \zeta Z}}}$$
 (23)

其中,  $\zeta = \left\lfloor \frac{2^n - 1}{Z} \right\rfloor$ 。当  $Z$  固定不变时, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{LCZ} = 1$ , 即序列集  $C$  是渐进最优 LCZ-CSS。

### 附录 4 推论 3 证明

根据引理 2, 最优因子为

$$\rho_{LC} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3} \times 2^n}\right)}}}$$
 (24)

可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{LC} = 1$ , 即序列集  $C$  是渐进最优 LC-CSS。

### 参考文献:

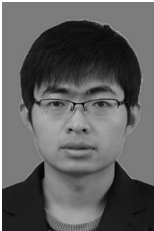
[1] LI S F, WU H D, JIN L B. Channel estimation in time domain using complementary sequence[C]//Proceedings of 2017 3rd IEEE International Conference on Control Science and Systems Engineering (ICCSSE). Piscataway: IEEE Press, 2017: 474-477.  
 [2] LIU Z L, GUAN Y L, CHEN H H. Fractional-delay-resilient receiver design for interference-free MC-CDMA communications based on complete complementary codes[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2015, 14(3): 1226-1236.  
 [3] SUN S Y, CHEN H H, MENG W X. A survey on complementary-coded MIMO CDMA wireless communications[J]. IEEE Communications Surveys & Tutorials, 2015, 17(1): 52-69.

[4] 范平志, 李里, 陈欢, 等. 面向大规模物联网的随机接入: 现状、挑战与机遇[J]. 通信学报, 2021, 42(4): 1-21.  
 FAN P Z, LI L, CHEN H, et al. Random access for massive Internet of things: current status, challenges and opportunities[J]. Journal on Communications, 2021, 42(4): 1-21.  
 [5] LIU Z L, PARAMPALLI U, GUAN Y L, et al. Constructions of optimal and near-optimal quasi-complementary sequence sets from singular difference sets[J]. IEEE Wireless Communications Letters, 2013, 2(5): 487-490.  
 [6] WELCH L. Lower bounds on the maximum cross correlation of signals[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1974, 20(3): 397-399.  
 [7] LIU Z L, GUAN Y L, MOW W H. Improved lower bound for quasi-complementary sequence set[C]//Proceedings of 2011 IEEE International Symposium on Information Theory. Piscataway: IEEE Press, 2011: 489-493.  
 [8] LIU Z L, GUAN Y L, MOW W H. A tighter correlation lower bound for quasi-complementary sequence sets[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2014, 60(1): 388-396.  
 [9] LIU Z L, GUAN Y L, MOW W H. Asymptotically locally optimal weight vector design for a tighter correlation lower bound of quasi-complementary sequence sets[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(12): 3107-3119.  
 [10] LI Y, YAN T J, LV C. Construction of a near-optimal quasi-complementary sequence set from almost difference set[J]. Cryptography and Communications, 2019, 11(4): 815-824.  
 [11] LI Y B, TIAN L Y, LIU T, et al. Constructions of quasi-complementary sequence sets associated with characters[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2019, 65(7): 4597-4608.  
 [12] LI Y B, TIAN L Y, LIU T, et al. Two constructions of asymptotically optimal quasi-complementary sequence sets[J]. IEEE Transactions on Communications, 2019, 67(3): 1910-1924.  
 [13] LI Y B, TIAN L Y, XU C Q. Constructions of asymptotically optimal a periodic quasi-complementary sequence sets[J]. IEEE Transactions on Communications, 2019, 67(11): 7499-7511.  
 [14] LIU T, XU C Q, LI Y B. Binary complementary sequence set with low correlation zone[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2020, 27: 1550-1554.  
 [15] LIU Z L, GUAN Y L, PARAMPALLI U. New complete complementary codes for peak-to-mean power control in multi-carrier CDMA[J]. IEEE Transactions on Communications, 2014, 62(3): 1105-1113.  
 [16] MEN X Y, LI Y B. New construction of multiple complete complementary codes with inter-set zero cross-correlation zone[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2022, 29: 1958-1962.  
 [17] ADHIKARY A R, FENG Y H, ZHOU Z C, et al. Asymptotically optimal and near-optimal a periodic quasi-complementary sequence sets based on florentine rectangles[J]. IEEE Transactions on Communications, 2022, 70(3): 1475-1485.  
 [18] SARKAR P, LI C L, MAJHI S, et al. Asymptotically optimal quasi

complementary code sets from multivariate functions[J]. arXiv Preprint, arXiv: 2204.13538, 2022.

- [19] SAMAD A, MAJHI S. A near-optimal and low-complex joint multiuser detection for QCSS-MC-CDMA system[J]. IEEE Systems Journal, 2021, 15(2): 1594-1603.
- [20] LIU Z L, GUAN Y L, NG B C, et al. Correlation and set size bounds of complementary sequences with low correlation zone[J]. IEEE Transactions on Communications, 2011, 59(12): 3285-3289.
- [21] TIAN L Y, LIU T, LI Y B. New constructions of binary golay spreading sequences for uplink grant-free NOMA[J]. IEEE Communications Letters, 2022, 26(10): 2480-2484.
- [22] ZHANG Z Y, TIAN F C, ZENG F X, et al. Multiple orthogonal subsets with three-valued in-phase cross-correlation for HF communications[J]. IEEE Communications Letters, 2016, 20(7): 1377-1380.

#### [作者简介]



李玉博（1985-），男，河北衡水人，博士，燕山大学教授、博士生导师，主要研究方向为序列设计与编码、大规模多址接入和通感一体化信号设计。



王美悦（1999-），女，河北衡水人，燕山大学硕士生，主要研究方向为序列设计与编码理论。



刘涛（1987-），女，河北秦皇岛人，博士，燕山大学讲师，主要研究方向为序列设计与编码理论。



陈晓玉（1983-），女，内蒙古赤峰人，博士，燕山大学副教授、硕士生导师，主要研究方向为序列设计、无线通信技术。